

Matrici reali e simmetriche

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{e supponiamo} \quad A^T = A$$

Teorema spettrale: Tutti gli autovalori di A sono reali.

DIM: Il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ ha sicuramente almeno una radice $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Facciamo vedere che deve essere $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ cioè $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$

Sia λ_0 un autovalore complesso di A e $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ un corrispondente autovettore $\lambda_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_0^T \lambda_0 \overline{\lambda_0} = {}^T(\lambda_0 \lambda_0) \overline{\lambda_0} = {}^T(A \lambda_0) \overline{\lambda_0} = {}^T \lambda_0 A^T \overline{\lambda_0} = {}^T \lambda_0 A \overline{\lambda_0} =$$

$A = {}^T A$

ortogonale P tale che

$$M \quad P^{-1} A P = D$$

$$\text{ma } P^{-1} = {}^t P$$

$\Rightarrow {}^t P A P = D$ e dunque riempire la base B_2 matrice di altre delle colonne di P , * ha v format
diagonale.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

adesso consideriamo la base

B_2 ottenuta da B_1 dividendo

ogni vettore $\bar{v}_i$ di B_1 con $\bar{v}^* \bar{v} \neq 0$ per ~~che~~

$$\sqrt{|\bar{v}^* \bar{v}|}$$

o

Corollario: Sia $*$ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$.

Allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice rappresentativa di $*$ rispetto ad essa è diagonale e contiene come entrate solamente $-1, 0, +1$.

Il numero di entrate neg., nulle, positive sulla diagonale è detto segno della prod. scalare.

oss: Una prod. scalare è non degenera $\Leftrightarrow$ la sua segnatura non contiene 0.

Dim: Sia $\mathcal{O}_3 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ una base qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ sia A la matrice di $*$ rispetto a $\mathcal{O}_3$.

$\Rightarrow A = {}^t A$ e dunque esiste una matrice diag.

$$\Rightarrow \text{calcolo} \quad P_2^{-1}(P_2^{-1} A P_2)P_2' =$$

$$= P_2^{-1} \left[\frac{x_2}{A_2} \right] P_2' = \left[\frac{1}{P_2^{-1}} \right] \left[\frac{x_1}{A_1} \right] \left[\frac{1}{P_2} \right]$$

$$= \left[\frac{x_2}{P_2^{-1} A_1 P_2} \right] = \left[\frac{x_2}{D_2} \right]$$

In particolare $P = P_2 P_1'$ diagonalizza A .

$$\text{D'altra parte } {}^t P P = {}^t (P_1 P_2') (P_2 P_1') = {}^t P_2' (P_2 P_2) P_2' =$$

$$= {}^t P_2' P_2 = \left[\frac{1}{{}^t P_2 P_2} \right] = I$$

Quindi P è ortogonale $\square$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{con } A_1 \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$$

$$\text{oss: } (\tilde{y}_i^T A \tilde{y}_i) =$$

$$\Rightarrow A_1 = {}^T A_1$$

per ipotesi induttiva

$$\exists P_2 \in \mathcal{O}(n-1, \mathbb{R}) \text{ con}$$

$$P_2^{-1} A_1 P_2 = D_1$$

$$P_2^{-1} = {}^T P_2$$

→ pongi

$$P'_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & P_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\tilde{y}_i^T A \tilde{y}_i) = \\ &= (\tilde{y}_i^T A \tilde{y}_i) = \\ &= (\tilde{y}_i^T A \tilde{y}_i). \end{aligned}$$

Sia $P_2 = [\tilde{x}_2 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_n]$ la matrice che ha come colonne i vettori di $\mathcal{O}_{\mathcal{R}_2}$. Oss: $P_2^{-1} = {}^t P_2$

$$({}^t \tilde{x}_1 A) = {}^t (A \tilde{x}_1) = \lambda_2 {}^t \tilde{x}_1$$

perché A simmetrica

$$\begin{aligned}
 P_2^{-1} A P_2 &= {}^t P_2 A P_2 = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{x}_1 A \tilde{x}_1 & {}^t \tilde{x}_1 A \tilde{y}_2 & \dots & {}^t \tilde{x}_1 A \tilde{y}_n \\ {}^t \tilde{y}_2 A \tilde{x}_1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t \tilde{y}_n A \tilde{x}_1 & \dots & \dots & {}^t \tilde{y}_n A \tilde{y}_n \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_2 {}^t \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 & \lambda_2 {}^t \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 & \dots & \lambda_2 {}^t \tilde{x}_1 \tilde{y}_n \\ {}^t \tilde{y}_2 \lambda_2 \tilde{x}_1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t \tilde{y}_n \lambda_2 \tilde{x}_1 & \dots & \dots & {}^t \tilde{y}_n \lambda_2 \tilde{y}_n \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

per il teorema spettrale A ha almeno un autovettore reale λ_1 e via λ_a in suo corrispondente autovettore reale. $X_1 \in \mathbb{R}^n$ & $X_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ possiamo sempre completare X_1 a base di $\mathbb{R}^n$

$B_0 = (X_1 \ Y_2 \dots \ Y_n)$ base di $\mathbb{R}^n$

possiamo ora ortormalizzare con G/S rispetto il prod. scalare standard B_0 .

$$B_1 = (\tilde{X}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n)$$

base ortonormale.

oss: $\tilde{X}_1 = \frac{1}{\|X_1\|} X_1$ e dunque $\tilde{X}_1$ è autovettore di A di autovettore λ_1

Viceversa: $A = {}^t A$ e mostriamo che $\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1} A P = D$ con $P^{-1} = P$.

per induzione su $n = \text{ordine della matrice } A$.

• $n=1$. Nella 1^a dimostriamo $A = (a_n) \quad P = (1)$
 ${}^t P = P^{-1}$

$$P^{-1} A P = (a_n)$$

• $(n-1) \Rightarrow n$.

H_P : $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ opp. simmetrica ${}^t A = A$
ogni matrice reale e simmetrica di ordine $(n-1)$
è ortogonalmente diagonalizzabile.
 T : A è ortogonalmente diagonalizzabile.

oss: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ & $\bar{A} = A \Rightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(A)} m_{\lambda}(\lambda) = n.$

Teorema (della base spettrale). Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

DIM: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$

$$\exists P \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ con } {}^tP = P^{-1} \text{ e } P^{-1}AP = D \text{ con}$$

$$D \text{ diagonale.} \Rightarrow {}^t(P^{-1}AP) = {}^tD = D = P^{-1}AP$$

"

$${}^tP A {}^tP^{-1} = P^{-1} A P.$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}\bar{A}P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{-1}A = P^{-1}\bar{A} \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A \text{ è simmetrica.}$$

$$= {}^t X_0 \bar{A} \bar{X}_0 = {}^t X_0 (\overline{A X_0}) = {}^t X_0 (\overline{R_0 X_0}) = \bar{R}_0 {}^t X_0 \bar{X}_0$$

$A = \bar{A}$
perché $A \in \mathbb{R}^{n,m}$

$$\Rightarrow (R_0 - \bar{R}_0) {}^t X_0 \bar{X}_0 = 0$$

altro caso $X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t X_0 \bar{X}_0 = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n =$
 $= \sum_i |x_i|^2 > 0$ se $X_0 \neq 0$

$$\Rightarrow R_0 = \bar{R}_0 \Rightarrow R \in \mathbb{R}$$

□

oss: Siccome R_0 è reale esiste anche almeno un autovettore $X_1 \in \ker(A - R_0 I)$ con $X_1 \in \mathbb{R}^n$

[ma il vettore nullo $\checkmark$ ha dimensione arbitraria non zero reale].

rispetto a O_2 la matrice di * è

della forma $D' = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & -1 \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & -1 & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ +1 & & & & & & \end{array} \right]$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ corrispondono agli autovalori di A
negativi; 0 al $\ker(A)$ = autovalori nulli di A ;
+1 agli autovalori positivi

□.

Geometria: Affine $\mathbb{K}$

Euclidea | $n=2$ $\mathbb{R}$
 $n=3$

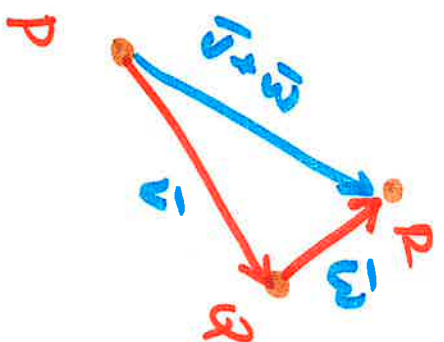
Ampliata (proiettiva) Complessificata. $\mathbb{C}$

Geometria Affine $\rightarrow$ studio delle soluzioni
di sist. lineari compat.
non omogenei.

$\rightarrow$ studio delle proprietà
di strutture con punti,
rette, sottospazi curve
algebraiche, etc.

Costruzione della geometria affine a partire da uno
spazio vettoriale. $\rightarrow$ lo sp. vettoriale fornisce le
traslazioni $\Leftrightarrow$ le direzioni possibili in cui

$$\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP}$$



Propositione: 1) $\vec{PP} = \underline{0}$

2) $\vec{PX} = \underline{0} \Leftrightarrow X = P$

3) $\vec{PQ} = -\vec{QP}$

DIM: 1) $\vec{PP} + \vec{PP} = \vec{PP}$ nottando a dx e sx $\vec{PP}$

$$\vec{PP} = \underline{0}$$

2) $\forall P \exists ! Q: \vec{PQ} = \underline{0}$ & $\vec{PP} = \underline{0} \Rightarrow \vec{PX} = \underline{0} \Rightarrow X = P$
 il vettore è nullo.

3) $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} \Rightarrow \vec{PQ} = -\vec{QP}$
 □

oss:

$$|A| = |V(k)|$$

poiché $A \neq \emptyset \exists P \in A$. $\forall \vec{v} \in V(k) \exists ! Q: \vec{PQ} = \vec{v}$
 $Q = P + \vec{v}$

$\Rightarrow$ costruiamo una funzione

$$\Phi_P: \{V(k)\} \rightarrow A$$
$$\vec{v} \rightarrow P + \vec{v}$$

Φ_P è iniettiva per l'assione di spazio affine.

Φ_P è suriettiva perché $f: k \times A \rightarrow V(k)$ è una

funzione e dunque ovunque definita e

quindi $\forall P, Q \in A \exists (P, Q) \in V(k)$ cioè

$$\exists \vec{v}: \vec{PQ} = \vec{v}.$$

□

Sia $M(A, f, V(k))$ uno spazio affine.

Chiamiamo riferimento affine $\Pi = (\mathcal{O}, \mathcal{B})$ una coppia ordinata ove $\mathcal{O} \in A$ è un punto e $\mathcal{B}$ è una base di $V(k)$.

Sappriamo che $V(k) = n$ e che $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ è un riferimento affine di $(A, f, V(k))$ con

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n).$$

Si chiama coordinatizzazione rispetto a Π la funzione

$$\Phi_{\Pi}: \begin{cases} A \rightarrow k^n \\ p \rightarrow (p_1 \dots p_n) \text{ ove } \vec{OP} = p_1 \bar{e}_1 + \dots + p_n \bar{e}_n \end{cases}$$



Teorema $\Phi_r : A \rightarrow V(K^n)$ è una isomorfismo.

DIM: Siano P, Q tali che $\Phi_r(P) = \Phi_r(Q)$

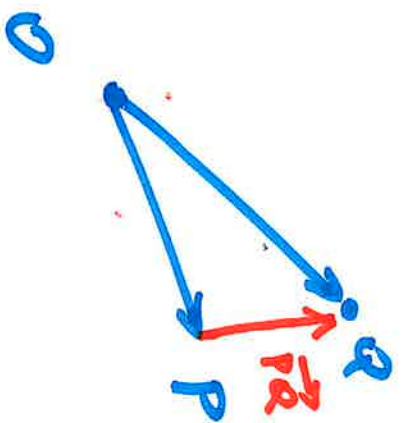
$$\Rightarrow \vec{OP} = p_1 \vec{e}_1 + \dots + p_n \vec{e}_n = \vec{OQ} \Rightarrow P = Q.$$

(iniettiva).

Suriettiva: $\forall P \in A \exists \vec{OP} \in V(K^n).$

□

Oss: Se P un riferimento affine Allora
le componenti di $\vec{PQ}$ rispetto a S sono $\Phi_r(Q) - \Phi_r(P).$



$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{PO} + \vec{OQ} = \\ &= -\vec{OP} + \vec{OQ} \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{PQ}$ ha componenti:

$$-x_P(P) + x_Q(Q).$$

A volte si trova la scrittura: $\vec{PQ} = Q - P$

$$\left[\begin{array}{l} \text{componenti} \\ \text{di } \vec{PQ} \end{array} = \begin{array}{l} \text{coordinate} \\ \text{di } Q \end{array} - \begin{array}{l} \text{coordinate} \\ \text{di } P \end{array} \right]$$

A " " non è una operazione fra punti!

$$P, Q \in A \quad Q - P \in V_n(K)$$

Sia $P \in A$; $\vec{v} \in V_n(k) \Rightarrow$ l'unico punto Q tale che

$$\vec{PQ} = \vec{v} \quad \text{ha come coordinata}$$

rispetto a P

$$\Phi_r(Q) = \Phi_r(P) + \Phi_r(\vec{v}_2 \dots \vec{v}_n)$$

$$\text{ove } \vec{v} = v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n = \vec{v}.$$

$$\underline{\text{Dim:}} \quad \Phi_r(v_2 \dots v_n) = \Phi_r(Q) - \Phi_r(P) \quad \square$$

Spazio vettoriale $Q = P + \vec{v}$

+ in questo caso è una funzione

$$+ : A \times V(k) \rightarrow A$$

NON È UNA OPERAZIONE FRA PUNTI!

Def: Sia $\bar{v} \in V(k)$. Si dice traslazione di vettore

$$\bar{v} \text{ la funzione } T_{\bar{v}}: \begin{cases} A \rightarrow A \\ X \mapsto X + \bar{v} \end{cases}$$

oss: Le traslazioni sono biiezioni di A in se stesso.

Def: Sia $(A, f, V(k))$ uno sp. affine. Si dice sottospazio

affine $S \subseteq A$ tale che $\exists U(k) \subseteq V(k)$ con

$f: 3 \times 5 \rightarrow U(k)$, f' restrizione di f ad A crondata ad

$U(k)$ e $(S, f', U(k))$ spazio affine.

Si dice dim(S) la dim. di $U(k)$.

$\dim(S)$	nome
0	punti
1	rette
2	piani
3	solidi
$n-1$	iperpiani.

$$\dim V(k) = n$$

Visi come sottospazi i punti non singoletti di A invece che elementi di A .

Ighoreremo questa distinzione!

$$\{P\} \equiv P$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{l} H \\ \cap \\ H \end{array} \quad \begin{array}{l} H \\ \cap \\ H \end{array} \quad \begin{array}{l} H \\ \cap \\ H \end{array}$$

Def: Sia $(A, f, V(k))$ uno spazio affine, $P \in A$, $n \leq V(k)$.
Si dice sottospazio lineare di $\dim(n)$

avere sottospazio di traslazione $\mathcal{U}$ ed origine P
l'insieme di punti

$$[P; \mathcal{U}] := \{P + \bar{u} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}\}.$$

$[P; \mathcal{U}]$ è l'insieme di tutti i traslati di P
secondo vettori di $\mathcal{U}$.

Δ Sottospazi ~~di traslazione~~ lineari
e sottospazi affini non lo
sono cosa!

1) OGNI SOTT. ^{LINEARE} ~~DI TRASLAZIONE~~ È UN SOTTOSPAZIO AFFINE.

$([P; \mathcal{U}], \mathcal{U}, \mathcal{U})$ è uno spazio affine.

$$\forall x \in [P; \mathcal{U}] \exists \bar{v} \in \mathcal{U} : \vec{P}x \in \mathcal{U}$$

$\vec{v} = \vec{P}x$ cioè il vettore di $\bar{u}$ vale che

$$P * \vec{v} = x.$$

Inoltre $\forall R, S \in [P; \mathcal{U}]$

$$\vec{RS} = \vec{R}P + \vec{PS} = -\vec{PR} + \vec{PS} \in \mathcal{U}$$

$\Rightarrow$ la funzione f' ha no vincoli a $[P; \mathcal{U}]$
ha codominio $\mathcal{U}$.

$$\forall \bar{u} \in \mathcal{U}, \forall T \in [P; \mathcal{U}] \Rightarrow T + \bar{u} = P + (\vec{P}T + \bar{u}) \in$$

$$\vec{P}T + \bar{u} \in \mathcal{U}$$

quindi $T + \bar{u} \in [P; \mathcal{U}]$ $\square$

2) OGNI SOTTOSPACIO AFFINE È ~~INFINITO~~ LINEARE

$(S, f', \mathcal{U})$ sottospazio affine.

Prendiamo $P \in S$ e consideriamo $[P; \mathcal{U}]$.

Allo stesso modo $[P; \mathcal{U}] \subseteq S$ in quanto i traslati di qualsiasi punto di S rispetto un vettore di $\mathcal{U}$ sono in S .

Ma anche se $\exists R \in S \setminus [P; \mathcal{U}] \Rightarrow f'(P, R) \in \mathcal{U} \Rightarrow \vec{PR} \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow P + \vec{PR} \in [P; \mathcal{U}] \Rightarrow R \in [P; \mathcal{U}]$$

$$\Rightarrow S = [P; \mathcal{U}]$$

□

Oss: Siano $[P; \mathcal{U}]$ e $[Q; \mathcal{W}]$ due sottospazi lineari

$$Q \text{ quando } [P; \mathcal{U}] = [Q; \mathcal{W}] \text{ ?}$$

$$\text{Sufficiente } [P; \mathcal{U}] = [Q; \mathcal{W}] \Rightarrow \exists R \in [P; \mathcal{U}] \cap [Q; \mathcal{W}]$$

ma osserviamo che $[P; \mathcal{U}] = [R; \mathcal{U}]$
 $[Q; \mathcal{W}] = [R; \mathcal{W}]$

in quanto $\forall X \in [P; \mathcal{U}], \vec{P}X \in \mathcal{U} \Rightarrow \vec{P}R \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \vec{R}\vec{P} + \vec{P}X \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in [R; \mathcal{U}]$$

il viceversa è analogo).

Se $[P; \mathcal{U}] = [Q; \mathcal{W}] \Rightarrow [R; \mathcal{U}] = [R; \mathcal{W}]$ con R come sopra.

$\Rightarrow$ deve essere $\mathcal{U} = \mathcal{W}$.

□

Oss: 1) $[P; \mathcal{U}] = [Q; \mathcal{W}] \Leftrightarrow [P; \mathcal{U}] \cap [Q; \mathcal{W}] \neq \emptyset$ ed $\mathcal{U} = \mathcal{W}$

2) $[P; \mathcal{U}] = [R; \mathcal{U}] \Leftrightarrow R \in [P; \mathcal{U}]$ in uno spazio
lineare si può scegliere come origine

un qualsiasi suo punto.

with $[P; L(\bar{v}_1)] = \text{soft. linear di. div} = 1$

$$= \{ P + \alpha \bar{v}_e \mid \alpha \in \mathbb{K} \}.$$

in coordinate

$$n=2$$

$$P = (x_P, y_P) \quad \bar{v}_1 = (e, m)$$

$$\begin{cases} x = x_P + \alpha e \\ y = y_P + \alpha m \end{cases}$$

insiemi di
 ∞
punti

$$n=3$$

$$P = (x_P, y_P, z_P) \quad \bar{v}_e = (e, m, n)$$

$$\begin{cases} x = x_P + \alpha e \\ y = y_P + \alpha m \\ z = z_P + \alpha n \end{cases}$$